

Rev. Bras. Ens. Fis. v.26 n.4 São  
Paulo out./dez. 2004

ARTIGOS GERAIS

## A aerodinâmica da bola de futebol

### Aerodynamics of the soccer ball

C.E. Aguiar; G. Rubini

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

[Endereço para correspondência](#)

---

#### RESUMO

Estudamos as forças aerodinâmicas que atuam sobre uma bola de futebol. Analisando o vídeo de uma jogada famosa de Pelé, nós mostramos que um fenômeno curioso, a crise do arrasto, influenciou significativamente o movimento da bola. O efeito Magnus, associado à rotação da bola, também revelou-se importante para o desfecho da jogada. Usando um programa de computador que simula o movimento de bolas chutadas em diferentes condições, discutimos vários aspectos do lance de Pelé e da Física do futebol, em particular as bolas de efeito e a *folha seca* de Didi.

**Palavras-chave:** Física dos esportes, futebol, crise do arrasto, efeito Magnus.

---

## ABSTRACT

We study the aerodynamic forces acting on a soccer ball. Analyzing the video of a famous shot by Pelé, we show that a curious phenomenon, the drag crisis, greatly influenced the motion of the ball. The Magnus effect, caused by the rotation of the ball, was also important to the outcome of the kick. Using a computer code that simulates the flight of balls we discuss several aspects of Pelé's shot and of soccer physics, in particular bending kicks and Didi's *dry leaf*.

**Keywords:** physics of sports, soccer, drag crisis, Magnus force.

---

## 1. Introdução

A Física dos esportes é uma área de estudos fascinante, com aplicações práticas evidentes e um grande potencial pedagógico [1, 2, 3]. O futebol, em particular, como esporte mais popular do mundo (para não falar em certo país), pode dar uma motivação especial ao aprendizado de muitos tópicos da Física.

Neste trabalho nós estudamos as forças aerodinâmicas que atuam sobre uma bola de futebol. Mostramos que um fenômeno notável, a "crise do arrasto", desempenha um papel importante em situações normais de jogo. A crise do arrasto é a redução abrupta que a resistência do ar sofre quando a velocidade da bola aumenta além de um certo limite. Esse é um fenômeno bem conhecido na dinâmica de fluidos, embora não seja usualmente tratado nos cursos de Física Básica (uma exceção é a Ref. [4]). Nós demonstramos a importância da crise do arrasto para o jogo de futebol analisando um lance famoso, o gol que Pelé perdeu na Copa de 1970, no jogo contra a Tchecoslováquia. Para isto, digitalizamos um vídeo contendo a jogada, e obtivemos a trajetória da bola com um programa de análise de imagens desenvolvido por nós. Um segundo programa simula o movimento da bola levando em conta as forças aerodinâmicas que atuam sobre ela. A comparação desses cálculos com os dados extraídos do filme mostra que não é possível descrever o movimento da bola chutada por Pelé sem levar em conta a crise do arrasto. Outro fenômeno aerodinâmico importante para a compreensão da jogada é o efeito Magnus, causado pela rotação da bola. Nossa análise da trajetória mostra que Pelé aumentou significativamente o alcance da bola chutando-a com "efeito".

O artigo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 2 discutimos a resistência do ar e a crise do arrasto. A relação da crise com a turbulência na camada limite é abordada na Seção 3. Na Seção 4 discutimos a importância da crise do arrasto em diferentes esportes. A rotação da bola e o efeito Magnus são tratados na Seção 5. Na Seção 6 descrevemos a análise do vídeo com a jogada de Pelé e a obtenção da trajetória da bola. Na Seção 7 mostramos que tanto a crise do arrasto quanto o efeito Magnus são essenciais para a descrição dessa trajetória. Na Seção 8 apresentamos um programa de simulação que permite estudar de forma muito sugestiva vários aspectos da Física do futebol, entre eles o papel desempenhado pela crise e o efeito Magnus. Com o programa exploramos a dinâmica dos chutes de efeito, e discutimos a famosa *folha seca* de Didi. A Seção 9 contém nossas conclusões e alguns comentários finais.

## 2. A força de arrasto

Uma bola de futebol em movimento no ar está sujeita a forças aerodinâmicas causadas pela pressão e viscosidade do meio. A força resultante pode ser decomposta em duas componentes: o arrasto, antiparalelo à velocidade, e a sustentação, perpendicular à velocidade. Nesta seção vamos discutir as propriedades da força de arrasto. A força de sustentação que surge quando a bola está girando (efeito Magnus) será tratada mais à frente.

A força de arrasto depende fortemente da velocidade  $V$  com que a bola se move em relação ao ar. É conveniente parametrizar essa dependência introduzindo o coeficiente de arrasto  $C_A$ , em termos do qual a força de arrasto  $F_A$  é escrita como

$$F_A = \frac{1}{2} C_A \rho A V^2, \quad (1)$$

onde  $\rho$  é a densidade do ar ( $1,224 \text{ kg/m}^3$  ao nível do mar) e  $A$  é a área da seção transversal da bola. O coeficiente de arrasto é uma grandeza adimensional, e portanto só pode depender de quantidades igualmente adimensionais. Para uma bola com velocidade muito menor que a do som, a única quantidade deste tipo é o número de Reynolds,

$$Re = \frac{\rho D V}{\eta}, \quad (2)$$

onde  $D$  é o diâmetro da bola e  $\eta$  a viscosidade do ar ( $1,83 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ). O número de Reynolds mede a razão entre as forças inerciais e viscosas que atuam na bola, e indica o tipo de escoamento do fluido; valores de  $Re$  pequenos correspondem ao escoamento laminar, enquanto valores grandes estão associados à formação de turbulências. A linha cheia na [Fig. 1](#) mostra o coeficiente de arrasto determinado experimentalmente em uma esfera lisa como função do número de Reynolds [5].

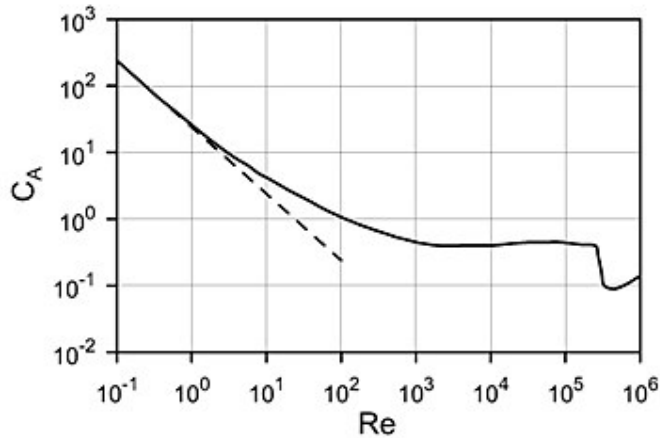


Figura 1 - Coeficiente de arrasto de uma esfera lisa, em função do número de Reynolds. A linha cheia é o resultado de medidas realizadas em túneis de vento. A linha tracejada corresponde à fórmula de Stokes (força de arrasto proporcional a  $V$ )

Para pequenos números de Reynolds,  $Re \ll 1$ , o coeficiente de arrasto é dado pela fórmula de Stokes,

$$C_A = 24/Re . \quad (3)$$

Neste caso a força de arrasto é linearmente proporcional à velocidade. A linha tracejada na Fig. 1 mostra a fórmula de Stokes, e vemos que ela é acurada até  $Re \approx 1$ . Para uma grande faixa de valores de  $Re$ , entre aproximadamente  $10^3$  e  $3 \times 10^5$ , o coeficiente de arrasto é praticamente constante, mantendo-se em torno de  $C_A = 0,5$ . Conseqüentemente, nesta região a força de arrasto é proporcional ao quadrado da velocidade. O aspecto mais curioso da Fig. 1 é a queda abrupta de  $C_A$  (por um fator da ordem de 5) em torno de  $Re = 3 \times 10^5$ . Esta redução drástica da resistência do ar é chamada de crise do arrasto.

A bola de futebol tem um diâmetro  $D = 22$  cm. Portanto, a relação entre a velocidade da bola e o seu número de Reynolds é

$$V = (6,7 \times 10^{-5} \text{ m/s}) \times Re . \quad (4)$$

Com esta fórmula é fácil verificar que o arrasto linear ( $Re \ll 1$ ) só ocorre para velocidades irrisórias, bem menores que 0,1 mm/s. Ou seja, a "resistência proporcional à velocidade", tão popular nos livros de Física Básica, não tem nenhuma importância para o futebol, nem para qualquer objeto razoavelmente grande movendo-se no ar. Vemos também que para uma bola de futebol (suposta uma esfera lisa) a crise do arrasto ocorre em  $V \approx 20$  m/s. A região onde a resistência do ar é proporcional a  $V^2$  corresponde a velocidades entre 0,1 m/s e 20 m/s.

A velocidade máxima que jogadores profissionais conseguem dar à bola de futebol é da ordem de 30 m/s. Os melhores chutadores atingem algo como 35 m/s. Portanto, durante uma partida de futebol a bola deve passar várias vezes pelo ponto de crise. Neste trabalho nós investigaremos se a ocorrência da crise afeta de forma perceptível o

movimento da bola. Mas antes vamos ver um pouco mais sobre esse fenômeno.

### 3. A crise do arrasto e a camada limite

A crise do arrasto está diretamente associada ao comportamento da "camada limite" de ar que se forma em torno da bola. A camada limite tem origem na aderência das moléculas do ar à superfície da bola. A viscosidade transmite parcialmente esta aderência às moléculas mais distantes, formando uma região que tende a mover-se com a bola. Esta região é a camada limite, ou camada de Prandtl. É por isso que as pás de um ventilador ficam sujas — as partículas de poeira acumuladas na sua superfície estão dentro da camada limite, onde não há vento para varrê-las.

Para números de Reynolds menores que aproximadamente 20, a camada limite envolve completamente a bola. O escoamento do ar é laminar, e o arrasto é dominado pela viscosidade. Para valores maiores de  $Re$  a camada limite separa-se da esfera na parte posterior, gerando uma esteira como a mostrada na parte de cima da [Fig. 2](#). A separação causa uma diminuição significativa da pressão na parte de trás da esfera, e a diferença entre as pressões dianteira e traseira passa a dominar o arrasto.

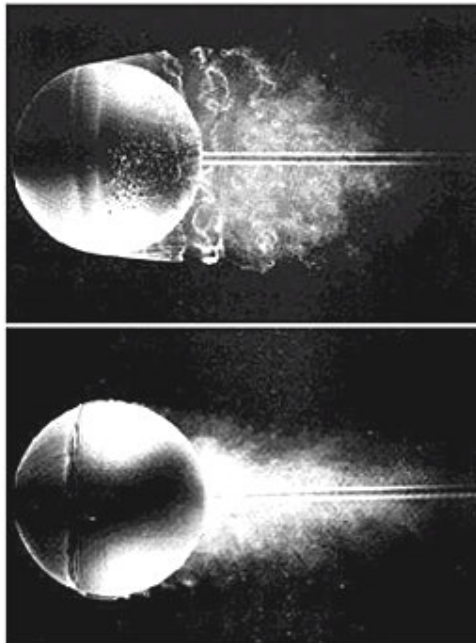


Figura 2 - Separação da camada limite em uma esfera (foto ONE-RA [6]). No alto: camada laminar. Embaixo: camada turbulenta.

A crise do arrasto ocorre quando a camada limite torna-se turbulenta. A turbulência permite que a camada resista melhor à tendência de separação [7], e com isso o ponto de descolamento move-se mais para trás da esfera, diminuindo a área da esteira. A parte de baixo da [Fig. 2](#) mostra a separação de uma camada limite turbulenta. Está aí a origem da crise — a contração da esteira reduz a área da esfera submetida a baixas

pressões, e causa uma diminuição da resistência do ar.

A textura da superfície também afeta o escoamento da camada limite. Uma esfera rugosa irá sofrer a crise em um número de Reynolds inferior ao de uma esfera lisa. A rugosidade precipita a turbulência na camada limite e, conseqüentemente, diminui a resistência do ar a altas velocidades. Parece estranho que uma bola áspera ofereça menos resistência ao ar que uma lisa, mas é exatamente o que acontece. É por isso que as bolas de golfe têm buracos cavados por toda a sua superfície — assim elas vão mais longe. E é interessante ver na [Fig. 3](#) como algumas bola de futebol modernas inspiraram-se na de golfe, apresentando as mesmas "covinhas" características.

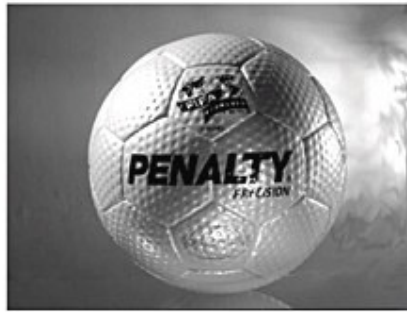


Figura 3 - Bola de futebol com cavidades semelhantes às de uma bola de golfe.

É difícil dizer exatamente onde ocorre a crise para uma bola rugosa, pois isso depende não apenas do grau de irregularidade, mas também da sua distribuição pela superfície. De qualquer forma, uma indicação pode ser encontrada na [Fig. 4](#), que mostra o coeficiente de arrasto para bolas com vários graus de aspereza [8]. Vemos que a crise pode ocorrer para valores bem diferentes de  $Re$ , dependendo da rugosidade da superfície. Note-se que as bolas de golfe sofrem a crise a um número de Reynolds particularmente baixo, graças ao planejamento cuidadoso das cavidades em sua superfície. As bolas de futebol comuns podem ser consideradas como razoavelmente lisas, mas não se sabe ao certo onde está o seu ponto de crise [9,10]. Outro complicador é o grau de turbulência já existente no ar, que pode deflagrar a crise mais cedo. A localização ligeiramente diferente da crise para esferas lisas nas [Figs. 1 e 4](#) provavelmente se deve a distintos níveis de turbulência nos túneis de vento onde foram realizadas as medidas.

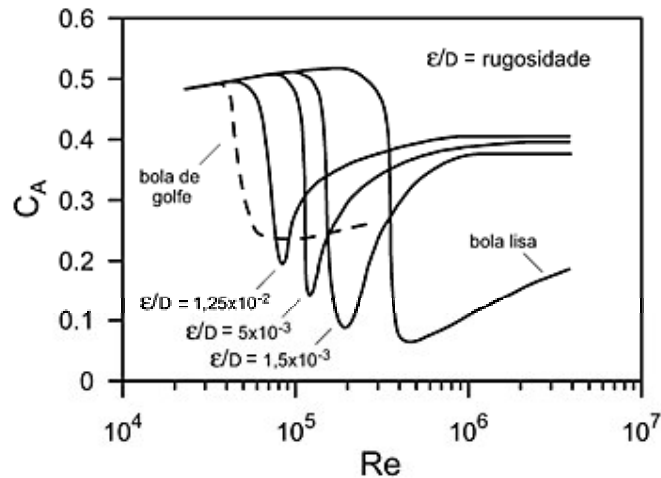


Figura 4 - Coeficiente de arrasto para diferentes graus de rugosidade  $\epsilon/D$ , onde  $\epsilon$  é a altura típica das irregularidades e  $D$  é o diâmetro da bola [8].

#### 4. A crise em outros esportes

É interessante investigar em que outros esportes a crise do arrasto pode se manifestar. Calculando o número de Reynolds dado pelo diâmetro da bola em questão e por uma (alta) velocidade típica do jogo, obtemos os resultados da [Tabela 1](#).

Tabela 1 - Características da bola em vários esportes: velocidade (alta), diâmetro, massa e número de Reynolds.

Esporte	Vel. (m/s)	Diâm. (cm)	Massa (g)	$Re/10^5$
Futebol	30	22,2	454	4,4
Voleibol	30	21,0	270	4,2
Tênis	45	6,5	58	2,0
Beisebol	40	7,3	145	1,9
Golfe	60	4,3	46	1,7
Basquete	10	24,3	600	1,6
Tênis de mesa	5	3,8	25	0,13

Vemos que o futebol e o vôlei estão entre os esportes em que os maiores números de Reynolds são atingidos, e nos quais a velocidade de crise é ultrapassada com facilidade. A velocidade de crise também é amplamente superada pela bola de golfe, devido ao seu desenho especial. O caso do beisebol não é claro, mas há evidências de que a crise ocorre tanto em bolas lançadas quanto em rebatidas [11, 12]. Já a bola pequena e lisa do tênis de mesa não parece ter muita chance de passar pela crise. No tênis e no basquete, cujas bolas são bastante rugosas, é possível que a crise do arrasto seja uma

ocorrência comum.

## 5. O efeito Magnus

Quando a bola de futebol gira em torno de seu centro, uma força de sustentação (perpendicular à velocidade) passa a agir sobre ela: a força de Magnus. Esta força pode ser escrita como [13]

$$\vec{F}_M = \frac{1}{2} C_S \rho A V^2 \frac{\vec{\omega} \times \vec{V}}{|\vec{\omega} \times \vec{V}|}, \quad (5)$$

onde  $\vec{\omega}$  é o vetor velocidade angular. Note que a força de Magnus é perpendicular à velocidade e ao eixo de rotação. O coeficiente de sustentação  $C_S$  desempenha um papel semelhante ao coeficiente de arrasto discutido na seção anterior. Ele é uma quantidade adimensional, e portanto só pode ser função do número de Reynolds  $Re$ , do "parâmetro de rotação"  $S = \omega r / V$  ( $r$  é o raio da bola), e do ângulo  $\alpha$  entre a velocidade e o eixo de rotação. É útil definir o coeficiente de Magnus  $C_M = C_S / (S \sin \alpha)$  [14], em termos do qual a força de Magnus tem a forma

$$\vec{F}_M = \frac{1}{2} C_M \rho A r \vec{\omega} \times \vec{V}. \quad (6)$$

Medidas da força de Magnus em bolas de beisebol e futebol (todas feitas com o eixo de rotação perpendicular à velocidade, ou seja  $\alpha = \pi/2$ ) parecem indicar que  $C_M \approx 1$ , dependendo fracamente de  $S$ , e menos ainda de  $Re$  [10, 12, 13, 14, 15, 16]. Há também alguma evidência de que  $C_M$  é independente de  $\alpha$  [13]. Assim, podemos considerar  $C_M(Re, S, \alpha) = 1$  como sendo uma aproximação razoável para o coeficiente de Magnus. Mas é importante ressaltar que em algumas situações esta aproximação é precária — em esferas muito lisas, por exemplo, o coeficiente de Magnus pode ser até negativo (efeito anti-Magnus) [15].

A explicação para o efeito Magnus nas bolas esportivas é dada pelo comportamento da camada limite sob rotações. A [Fig. 5](#) mostra o fluxo de ar em torno de uma bola que gira no sentido horário. Note que a separação da camada limite é antecipada na parte de baixo da bola, em que a rotação se opõe ao fluxo de ar, e adiada no lado de cima, em que a rotação acompanha a passagem do ar. A assimetria na separação da camada limite empurra o ar atrás da bola para baixo. Pela 3ª Lei de Newton, a bola sofre uma força em sentido contrário, para cima, o que dá origem ao efeito Magnus.

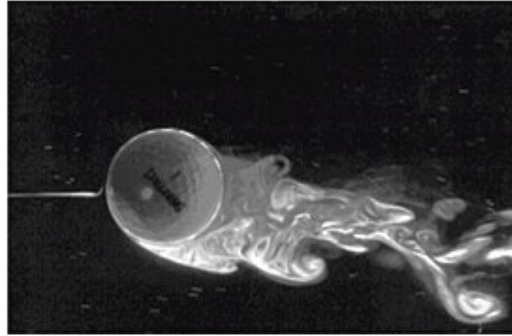


Figura 5 - Separação da camada limite em uma bola girando no sentido horário [17].

## 6. O gol que Pelé não fez

*"Por um momento, ninguém entendeu. Por que Pelé não passou? Por que atirava de tão espantosa distância? E o goleiro custou a perceber que era ele a vítima. Seu horror teve qualquer coisa de cômico. Pôs-se a correr, em pânico. De vez em quando, parava e olhava. Lá vinha a bola. Parecia uma cena dos Três Patetas. E, por um fio, não entra o mais fantástico gol de todas as Copas passadas, presentes e futuras. Os tchecos parados, os brasileiros parados, os mexicanos parados - viram a bola tirar o maior fino da trave. Foi um cínico e deslavado milagre não ter se consumado esse gol tão merecido. Aquele foi, sim, um momento de eternidade do futebol."*

O texto acima, de Nelson Rodrigues [18], descreve o "gol que Pelé não fez" na partida Brasil x Tchecoslováquia pela Copa do Mundo de 1970, em Guadalajara. Nós analisamos esta jogada célebre a partir de uma fita de vídeo, e obtivemos a trajetória da bola chutada por Pelé. Para isto, o trecho do vídeo contendo a cena foi digitalizado e armazenado em formato AVI em um computador PC/Windows. Cada quadro do vídeo (são 29,7 por segundo) foi então salvo como uma imagem individual em formato BMP. Dois desses quadros (no início e final da jogada) estão mostrados na [Fig.6](#).

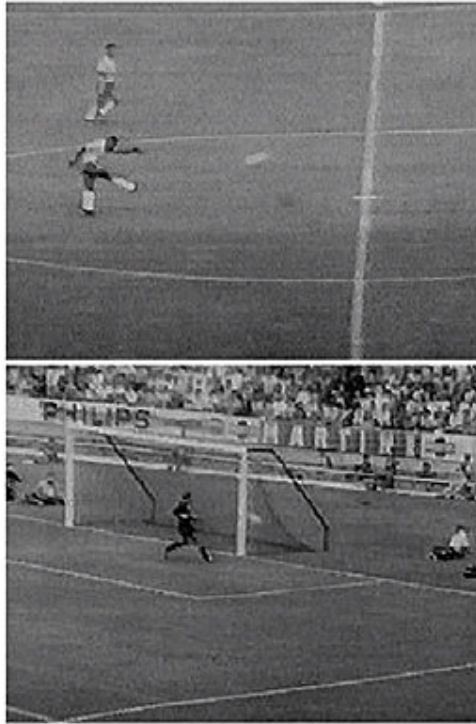


Figura 6 - No alto: o chute de Pelé. Embaixo: a bola passa rente à trave.

As imagens foram analisadas com um programa escrito em Logo que, com técnicas de geometria projetiva, extrai a posição da bola em cada quadro. A obtenção das 3 coordenadas ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) da bola a partir da informação bidimensional disponível no filme exige algumas hipóteses suplementares sobre a trajetória - nós supusemos que a bola moveu-se em um plano vertical. A localização deste plano em relação ao gramado foi determinada pela posição inicial da bola, que estava no chão no momento do chute, e pelo fato da trajetória ter passado rente ao poste esquerdo do gol tcheco. Com esta hipótese pudemos calcular a "terceira" dimensão que falta ao filme. É interessante notar que se Pelé tivesse acertado o meio do gol nossa análise seria muito mais difícil, pois não teríamos a segunda referência para determinar o plano da trajetória.

A trajetória encontrada está na [Tabela 2](#). A parte intermediária do movimento não foi filmada (o cameraman deve ter sido tão surpreendido quanto o goleiro) e, portanto, não temos as posições mais altas da bola. O sistema de referência que utilizamos tem o meio do campo como origem ( $X = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = 0$ ). O eixo  $X$  segue ao longo do comprimento do campo na direção da meta adversária,  $Y$  segue a largura do campo afastando-se da câmera, e  $Z$  dá a altura da bola.

Tabela 2 - Trajetória da bola chutada por Pelé, obtida a partir do vídeo.

Tempo (s)	X (m)	Y (m)	Z (m)
0.034	-4.3	-2.9	0.3
0.067	-3.4	-2.9	0.6
0.101	-2.4	-3.0	0.8
0.135	-1.5	-3.0	1.2
0.168	-0.6	-3.0	1.5
0.202	0.4	-3.0	1.7
0.236	1.2	-3.0	2.0
0.269	2.1	-3.0	2.3
0.303	2.9	-3.0	2.6
0.337	3.9	-3.0	2.8
0.370	4.7	-3.0	3.1
0.404	5.5	-3.1	3.4
0.438	6.2	-3.1	3.6
0.471	7.1	-3.1	3.8
0.505	7.7	-3.1	4.0
2.862	49.0	-3.6	2.8
2.896	49.6	-3.6	2.6
2.929	50.1	-3.6	2.2
2.963	50.6	-3.6	1.9
2.997	51.2	-3.6	1.7
3.064	52.2	-3.7	1.2
3.098	52.8	-3.7	0.9
3.131	53.1	-3.7	0.6
3.165	53.8	-3.7	0.3

Para obter as "condições iniciais" do chute de Pelé, nós ajustamos linhas retas aos quatro primeiros pontos da [Tabela 2](#). Assim encontramos o instante e posição do chute, e a velocidade inicial da bola. (Definimos como condição inicial o ponto em que a bola teria  $Z = 0$ .) Os resultados estão mostrados na [Tabela 3](#). A velocidade inicial da bola é  $V = 29,1$  m/s, bem acima do ponto onde deve ocorrer a crise do arrasto. O ângulo entre a velocidade inicial e o plano do gramado é  $\alpha = 17,6^\circ$ . Um procedimento semelhante foi aplicado ao final da trajetória, mostrando quando e onde cai a bola, e com que velocidade. Os números estão na última linha da [Tabela 3](#). A bola toca o chão com  $V = 17,6$  m/s, e a queda é bem mais vertical do que o lançamento, pois o ângulo entre a velocidade final e plano do gramado é  $\alpha = -30,2^\circ$ . Dos resultados da [Tabela 3](#), vemos que a bola ficou 3,20 segundos no ar e caiu a 59,5 metros do ponto onde foi chutada.

Tabela 3 - A posição e velocidade da bola chutada por Pelé, no início ( $t = 0,003$  s) e final ( $t = 3,200$  s) da trajetória.

t (s)	X (m)	Y (m)	Z (m)	V <sub>x</sub> (m/s)	V <sub>y</sub> (m/s)	V <sub>z</sub> (m/s)
0,003	-5,2	-2,9	0,0	27,8	-0,4	8,8
3,200	54,3	-3,7	0,0	15,2	-0,2	-8,9

## 7. A crise do arrasto e o efeito Magnus no chute de Pelé

Para investigar se a crise do arrasto e o efeito Magnus desempenharam um papel importante na jogada de Pelé, nós calculamos numericamente a trajetória da bola, partindo das condições iniciais da Tabela 3. Para simplificar o cálculo, consideramos que o coeficiente de arrasto é  $C_A = 0,5$  para  $V < V_{crise}$  e  $C_A = 0,1$  para  $V > V_{crise}$ . Como não conhecemos bem o efeito da rugosidade da bola de futebol sobre a velocidade de crise, deixamos  $V_{crise}$  como um parâmetro livre no modelo. Devemos notar, entretanto, que a forma específica que adotamos para o coeficiente de arrasto pressupõe que a bola de futebol seja razoavelmente lisa; se ela for muito áspera deveríamos ter uma dependência mais complicada na velocidade, como as mostradas na Fig. 4. O valor da densidade do ar que usamos foi  $\rho = 1,05$  kg/m<sup>3</sup>, apropriado para os 1600 metros de altitude de Guadalajara. Tomamos para o coeficiente de Magnus o valor constante  $C_M = 1$  discutido na Seção 5. Supusemos ainda que o eixo de rotação da bola aponta sempre na direção Y, e que a velocidade de rotação não diminui apreciavelmente ao longo da trajetória. Com isto ficamos com apenas duas quantidades indeterminadas: a velocidade de crise,  $V_{crise}$ , e a frequência de rotação da bola,  $f$ . Atribuindo valores a esses parâmetros temos uma trajetória bem definida, que pode ser comparada aos dados obtidos do filme.

Uma medida da diferença entre a trajetória calculada  $\vec{r}(t)$  e os resultados experimentais é dada pela quantidade

$$L^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\vec{r}(t_i) - \vec{r}_i]^2 \quad (7)$$

onde  $t_i$  e  $\vec{r}_i$  ( $i = 1 \dots N$ ) são os  $N$  pontos medidos. O valor de  $L$  dá a distância média (quadrática) entre as posições observadas e as calculadas com o modelo. A velocidade de crise e a frequência de rotação da bola podem ser determinadas procurando-se os valores de  $V_{crise}$  e  $f$  que levam à trajetória que mais se aproxima dos dados, ou seja, que tem o menor  $L^2$ . Esses valores são:

$$V_{crise} = 23,8 \text{ m/s}$$

$$f = -6,84 \text{ Hz.}$$

O sinal negativo de  $f$  corresponde a um *backspin*, ou seja, uma rotação no sentido negativo de Y. Isto significa que Pelé "pegou embaixo" ao chutar a bola, o que, como veremos, foi fundamental para o desenrolar da jogada. O ajuste obtido tem  $L = 28$  cm, um resultado bem aceitável considerando a simplicidade do modelo: a distância média entre os pontos medidos e a trajetória calculada é da ordem do diâmetro da bola (22 cm). A Fig. 7 mostra a trajetória calculada (no plano Z - X), juntamente com os pontos medidos.

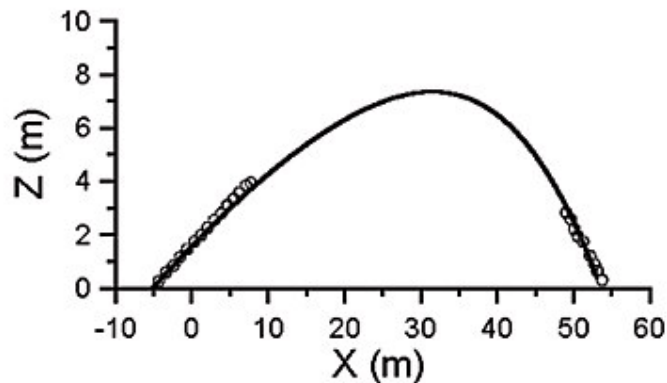


Figura 7 - A trajetória no plano  $Z-X$  da bola chutada por Pelé. Os círculos são as medidas feitas a partir do vídeo. A linha contínua foi obtida com o modelo descrito no texto.

A crise do arrasto desempenhou um papel importante na dinâmica da bola chutada por Pelé. Sem a crise, o arrasto logo após o chute corresponderia a aproximadamente duas vezes o peso da bola. A crise reduziu esse valor para cerca de 40% do peso. Mais ainda, a baixa resistência do ar persistiu durante quase metade do caminho percorrido pela bola. Portanto, é claro que uma diminuição dessa magnitude, e que durou tanto tempo, afetou profundamente a trajetória da bola.

A relevância do efeito Magnus para a jogada de Pelé pode ser avaliada a partir do valor encontrado para a frequência  $f$ . Esta rotação (cerca de 400 rpm) gerou uma força de sustentação da ordem de metade do peso da bola durante toda a trajetória, o que sem dúvida teve um efeito significativo sobre movimento.

Podemos ainda notar que o valor encontrado para  $V_{crise}$  corresponde a um número de Reynolds  $Re = 3 \times 10^5$ , na faixa esperada para esferas lisas (veja as [Figs. 1 e 4](#)). Portanto, a nossa hipótese de que a bola de futebol usada na Copa de 70 era razoavelmente lisa mostrou-se consistente com o resultado do ajuste.

Uma questão que pode ser levantada é se seria possível descrever o chute de Pelé sem recorrer à crise do arrasto, usando apenas outra velocidade de rotação. Nós eliminamos a crise, fazendo  $C_A = 0,5$  para todas as velocidades, e procuramos a frequência de rotação que levaria à melhor descrição dos dados. O resultado foi  $f = -9,0$  Hz, e o ajuste mostrou-se muito ruim - encontramos uma distância média  $L = 7,4$  m entre os dados e a trajetória calculada. A comparação com o valor  $L = 0,28$  m obtido levando em conta a crise mostra a importância que ela teve no movimento da bola.

Outra questão, complementar à anterior, é se podemos descrever a trajetória sem o efeito Magnus, mudando um pouco a velocidade de crise. Nós fixamos  $f = 0$  e encontramos que neste caso o melhor valor para a velocidade de crise seria  $V_{crise} = 24,8$  m/s. Novamente o ajuste mostrou-se péssimo, com  $L = 9,3$  m. Portanto, não é possível dispensar o efeito Magnus se queremos entender o chute de Pelé.

Assim, e esta é nossa principal conclusão, tanto a crise do arrasto quanto o efeito Magnus desempenham um papel importantíssimo na dinâmica de uma bola de futebol. É impossível ter uma boa descrição do chute dado por Pelé sem levar em conta esses aspectos da aerodinâmica da bola. As simulações que mostraremos a seguir darão uma

visão mais clara do que está ocorrendo.

## 8. Futebol no computador

Os resultados da seção anterior fornecem um modelo razoavelmente realista para a dinâmica de uma bola de futebol em voo. Nós implementamos este modelo em um programa escrito em Logo, que simula o movimento tridimensional da bola a partir de condições iniciais dadas (posição, velocidade e rotação). A versão de Logo que utilizamos foi o SuperLogo, produzido pelo NIED/Unicamp, em português e gratuito [19]. Os recursos gráficos em 3D do SuperLogo tornam particularmente simples fazer o programa de simulação, pois o tratamento da perspectiva tridimensional é realizado automaticamente pela linguagem. A trajetória da bola foi obtida numericamente com o método de Euler, um procedimento que pode ser entendido mesmo por alunos que não conhecem cálculo diferencial. O resultado é um programa simples, que pode ser explorado e modificado sem dificuldades por professores e alunos com diferentes níveis de formação matemática e computacional.<sup>1</sup>

Um exemplo de utilização do programa está mostrado na [Fig. 8](#), onde vemos a simulação do chute de Pelé. A marca no meio da trajetória aponta onde ocorreu a crise do arrasto.

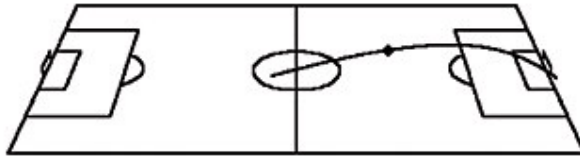


Figura 8 - Simulação do chute de Pelé. A crise do arrasto ocorre no ponto marcado sobre a trajetória.

Podemos investigar a importância da crise do arrasto para a jogada de Pelé tirando-a de ação, ou seja, fazendo  $C_A = 0,5$  para todas as velocidades. O que aconteceria com a bola caso a crise não reduzisse a resistência do ar está mostrado na [Fig. 9](#) – ela não chegaria nem mesmo à grande área.



Figura 9 - O que aconteceria com a bola chutada por Pelé se não houvesse a crise do arrasto.

A importância do efeito Magnus pode ser avaliada da mesma forma. Se a bola chutada por Pelé não tivesse nenhuma rotação, sua trajetória seria a mostrada na [Fig. 10](#). Ela mal chega à grande área, desta vez pela ausência da força de sustentação criada pelo efeito Magnus.

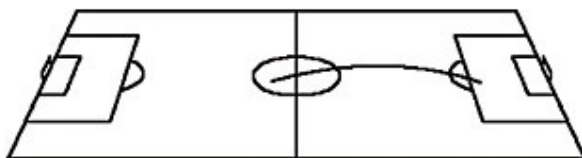


Figura 10 - O que aconteceria com a bola chutada por Pelé sem o efeito Magnus.

Mas talvez o mais surpreendente é o que ocorreria se não existissem nem o arrasto nem a força de Magnus (ou seja, se a bola tivesse sido chutada no vácuo). A parábola descrita pela bola está mostrada na [Fig. 11](#). Vemos que ela cairia bem antes do gol, apesar de não haver resistência do ar. Isso mostra mais uma vez quão importante é a sustentação aerodinâmica criada pelo efeito Magnus.

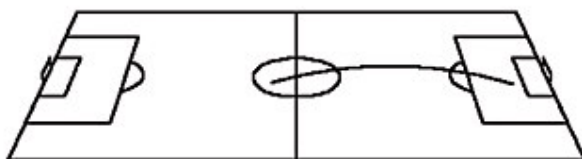


Figura 11 - O que aconteceria com a bola chutada por Pelé se ela estivesse no vácuo.

Muitos outros aspectos interessantes do jogo de futebol podem ser explorados com o programa de simulação. Os chutes de "efeito", por exemplo, revelam algumas das consequências mais espetaculares da força de Magnus. Na [Fig. 12](#) vemos a trajetória de bolas chutadas do mesmo ponto, com a mesma velocidade, e com diferentes rotações em torno do eixo vertical (0, 5 e 10 Hz). A bola sem rotação (0 Hz) passa bem longe da trave - já as bolas de efeito vão na direção do gol.

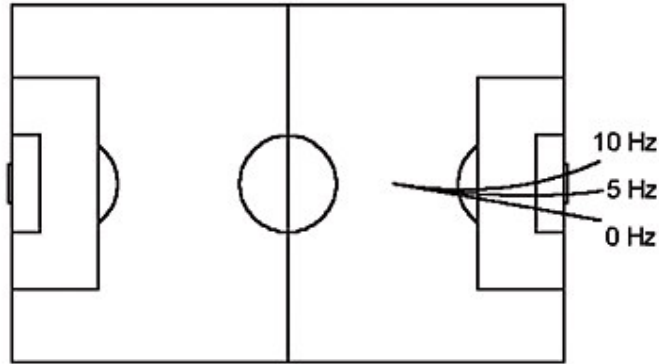


Figura 12 - Trajetórias de bolas com rotação em torno do eixo vertical.

Por último, vamos discutir uma jogada quase mitológica no futebol brasileiro: a folha seca de Didi. Uma das dificuldades aqui é a própria definição do que tenha sido a folha seca. Alguns a descrevem como um "chute que sobe e cai inesperadamente, como uma folha seca" [20]. Outros dizem que a bola "dava cambalhotas e mudava de rumo como uma folha seca perdida no vento" [21]. Didi afirmou ter inventado a jogada em um Botafogo x América do Campeonato Carioca de 1956, quando a dor em um tornozelo machucado por repetidas faltas o obrigou a chutar a bola de forma inusitada. Ao notar que com isso a bola tomava um rumo surpreendente, Didi passou a praticar esses chutes, aperfeiçoando-os tanto que fez dessa maneira gols que entraram para a história do futebol, como o contra o Peru pelas eliminatórias da Copa de 1958, e o contra a França na semifinal da mesma Copa.

Em um artigo muito interessante [1], Leroy tenta dar uma explicação para o "efeito folha seca". Ele está entre os que dizem ser a folha seca uma súbita mudança no rumo da bola. Segundo Leroy, Didi era capaz de chutar a bola de maneira a produzir uma rotação em torno de um eixo quase paralelo à velocidade inicial. Se isto ocorre, logo após o chute não há força de Magnus sobre a bola (note o produto vetorial na Eq. 6). Porém ao longo do caminho a força gravitacional vai mudando a direção da velocidade, e o ângulo entre esta e o eixo de rotação deixa de ser nulo. Isto faz com que ao final da trajetória uma força lateral bastante intensa esteja atuando sobre a bola. A [Fig. 13](#) mostra um chute com essas características. Vemos que a bola, cujo rumo parecia estar bem definido, subitamente faz uma curva acentuada para a esquerda.

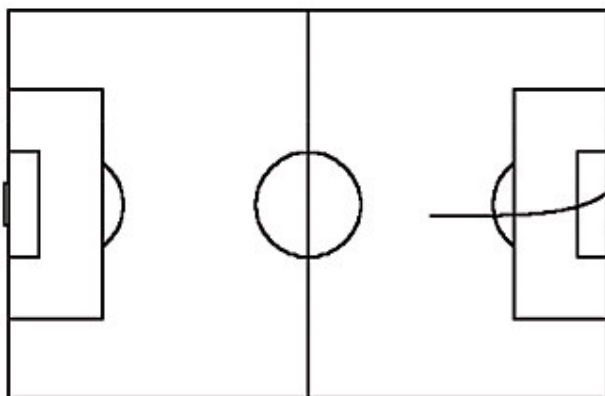


Figura 13 - A folha seca segundo Leroy [1]. A velocidade inicial da bola é 25 m/s, com um ângulo de  $37^\circ$  em relação ao gramado. A frequência de rotação é 10 Hz em torno de um eixo paralelo à velocidade inicial.

Pode-se discutir se o modelo de Leroy para a folha seca está inteiramente correto, dada a óbvia dificuldade de se imprimir à bola uma rotação cujo eixo aponte para a frente (devemos lembrar, entretanto, que esse é o tipo de coisa que jogadores geniais como Didi faziam). Outra possível explicação para o súbito desvio lateral é uma transição entre efeitos Magnus e anti-Magnus. Como já mencionamos, este último corresponde a um coeficiente de Magnus negativo, e foi observado em algumas faixas de velocidade e rotação para esferas muito lisas [15]. Assim, mesmo com um eixo de rotação vertical, a força lateral poderia trocar de sentido em determinado ponto da trajetória, fazendo a bola ter um comportamento aparentemente errático. Uma terceira possibilidade seria a força de Magnus sofrer uma crise análoga à da força de arrasto. Um aumento abrupto do coeficiente de Magnus na etapa final da trajetória também poderia criar deslocamentos laterais surpreendentes.

## 9. Comentários finais

Existem muitos artigos sobre a Física do beisebol, do golfe, do tênis, e pouquíssimos sobre o futebol. Esperamos ter mostrado aqui que o esporte mais popular do mundo tem uma Física interessante, não justificando tal abandono. É fácil encontrar "dados experimentais" sobre o jogo, em particular na forma de vídeos que podem ser digitalizados e analisados com programas relativamente simples. Com procedimentos desse tipo nós mostramos que dois fenômenos aerodinâmicos, a crise do arrasto e o efeito Magnus, desempenham um papel central no jogo de futebol. A relevância do efeito Magnus para os esportes de bola é bem conhecida, e costuma ser discutida qualitativamente nos cursos de Física Básica. Entretanto, raramente um tratamento quantitativo (ainda que aproximado, como o apresentado aqui) é encontrado. Quanto à crise, muito pouco se sabe sobre seus efeitos no futebol e na maioria dos outros esportes (o golfe é talvez a única exceção). Nossa análise do chute de Pelé mostra que é impossível entender a dinâmica de uma bola de futebol sem considerar a crise do arrasto.

Também apresentamos neste artigo um programa Logo que faz simulações muito sugestivas do movimento da bola, aproveitando os recursos que a linguagem oferece para desenhar em perspectiva. Com o programa de simulação discutimos a Física do

chute de Pelé, as bolas de efeito, e a folha seca de Didi. Muitos outros aspectos do futebol podem ser explorados da mesma forma. E, com algumas modificações, o programa pode ser usado para simular outros esportes como o vôlei ou basquete, abrindo espaço para um grande número de projetos interessantes.

## Agradecimentos

Agradecemos a Agostinho Mendes e ao LADIF-UFRJ pela ajuda na digitalização do vídeo com a jogada de Pelé. Agradecemos também a Edson Arantes do Nascimento por ter lido uma versão preliminar deste artigo e pelos comentários elogiosos. Este trabalho foi parcialmente apoiado pela Faperj, CNPq e Capes.

## Referências

- [1] B. Leroy, *Revista Brasileira de Física* **7**, 693 (1977).
- [2] M.A.F. Gomes, E.J.R. Partelli, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **23**, 10 (2001).
- [3] A. Armenti (Ed.), *The Physics of Sports* (Springer-Verlag, 1992).
- [4] R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* (Addison-Wesley, 1964), v. II, cap. 41.
- [5] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Butterworth-Heinemann, 1987), cap. IV.
- [6] H. Werlé, *Rech. Aérosp.* **5**, 35 (1980).
- [7] A.H. Shapiro, *Shape and Flow* (Doubleday, 1961).
- [8] E. Achenbach, *J. Fluid Mech.* **65**, 113 (1974).
- [9] T. Asai, T. Akatsuka and S. Haake, *Physics World*, June 1998, p. 25, disponível em <http://physicsweb.org/article/world/11/6/8>
- [10] M.J Carré, T. Asai, T. Akatsuka and S.J. Haake, *Sports Engineering* **5**, 193 (2002).
- [11] C. Frohlich, *Am. J. Phys.* **52**, 325 (1984).
- [12] G.S. Sawicki, M. Hubbard and W.J. Stronge, *Am. J. Phys.* **71**, 1152 (2003).
- [13] L.W. Alaways, *Aerodynamics of the Curve-Ball: An Investigation of the Effects of Angular Velocity on Baseball Trajectories*. Ph.D. thesis, University of California - Davis, 1998.
- [14] R.K. Adair, *Physics Today*, May 1995, 26.
- [15] L.J. Briggs, *Am. J. Phys.* **27**, 589 (1959).

[16] R.G. Watts, R. Ferrer, Am. J. Phys. **55**, 40 (1987).


[17] Foto por H. Higuchi e M. van Rooij, Dpt. of Mechanical, Aerospace and Manufacturing Engineering, Syracuse University.

[18] N. Rodrigues, *À Sombra das Chuteiras Imortais* (Companhia das Letras, 1993) p. 172.

[19] SuperLogo, <http://www.nied.unicamp.br>

[20] A. Mattos, *Enciclopédia do Futebol Brasileiro e Mundial* (Editora Leitura, 2002).

[21] E. Galeano, *El Fútbol a Sol y Sombra* (Ediciones del Chanchito, Montevideo, 1995).

 **Endereço para correspondência**  
C.E. Aguiar. E-mail: [carlos@if.ufrj.br](mailto:carlos@if.ufrj.br).

Recebido em 02/07/2004; Aceito em 30/11/2004

1 O programa está disponível em <http://www.if.ufrj.br/~carlos/futebol.html>

---

© 2006 *Sociedade Brasileira de Física*

Caixa Postal 66328  
05389-970 São Paulo SP - Brazil



[studart@df.ufscar.br](mailto:studart@df.ufscar.br)